

# Otimização no planejamento agregado de produção em indústrias de processamento de suco concentrado congelado de laranja

## Optimization in the aggregate production planning in frozen concentrated orange juice processing industry



José Renato Munhoz<sup>1</sup>  
Reinaldo Morabito<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste trabalho apresentam-se modelos de programação linear e programação por metas para apoiar decisões no processo de planejamento agregado da produção de suco concentrado congelado de laranja, com múltiplos produtos, estágios e períodos. Além das decisões de produção, mistura e estocagem de sucos, os modelos também incorporam o planejamento de colheita da laranja, levando-se em consideração suas curvas de maturação. Desta maneira, os modelos consideram grande parte da cadeia de suprimento envolvida no setor de produção de suco concentrado congelado de laranja. Outro ponto a destacar é a consideração do processo de mistura de diferentes tipos de sucos para a obtenção da especificação de *ratio* do produto acabado, utilizando a acidez da laranja como base de cálculo para a especificação de *ratio*. Para resolver os modelos de programação linear e programação por metas, utilizou-se uma linguagem de modelagem algébrica e um aplicativo de última geração de solução de problemas de programação matemática. Um estudo de caso foi realizado em uma empresa de suco de laranja localizada no Estado de São Paulo, envolvendo várias plantas e com uma rede de distribuição internacional com características típicas de outras empresas do setor. Os resultados indicam que a abordagem aqui proposta pode ser aplicada em situações reais.

**Palavras-chave:** Programação linear. Programação por metas. Processo de mistura. Suco concentrado congelado de laranja. Problemas de planejamento de produção com múltiplos produtos, estágios e períodos.

**Abstract:** This work presents models using linear programming and goal programming to support decision making in the frozen concentrated orange juice planning process with multiple products, stages, and periods. Besides decisions about the production, blending, and juice storage, the models also include orange harvesting plan, which takes into account oranges maturation curves. Thus, the models take into consideration a large portion of the supply chain involved in the frozen concentrated orange juice sector. Another point to highlight is the inclusion of the blending process of different types of juices to match the ratio specification of the product using orange acidity to calculate the ratio specification. To solve the linear programming and goal programming models, an algebraic modeling language and a state of art optimization solver of mathematical programming problems are used. A case study was developed in an orange juice company located in São Paulo State. This company has many facilities and a worldwide distribution system, similar to other companies in this sector. The results show that the proposed approach can be used in real situations.

**Keywords:** Linear programming. Goal programming. Blending process. Frozen concentrated orange juice. Production planning with multiple products, stages and periods.

## 1 Introdução

Na indústria de produção de suco de laranja, o processo de obtenção de produtos finais a partir das matérias-primas disponíveis no mercado envolve uma grande quantidade de informações. O processamento e a análise dessas informações podem apoiar a empresa na geração de um diferencial competitivo, que é a excelência no gerenciamento integrado da

cadeia de suprimentos. A coordenação da produção, estoques e transporte de matérias-primas (diferentes variedades de laranja), produtos intermediários (sucos concentrados de laranja de diferentes variedades de laranja, chamados de bases) e produtos finais (sucos concentrados congelados de laranja obtidos pelas misturas de diferentes bases) é particularmente

<sup>1</sup> Citrovita Agro Industrial Ltda., CEP 15800-970, Catanduva – SP, Brasil, E-mail: jose.munhoz@citrovita.com

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR, CEP 13565-905, São Carlos – SP, Brasil, E-mail: morabito@ufscar.br

importante devido à combinação da sazonalidade da fruta e à relativa estabilidade na demanda por produtos.

A utilização de modelos de otimização linear para representar tal processo pode resultar em um poderoso instrumento para análise de decisões táticas e operacionais. Dentro deste contexto, o presente trabalho utiliza programação linear e programação por metas para dar tratamento às informações, visando suprir subsídios ao tomador de decisão na busca da excelência na gestão da cadeia de suprimentos. A análise conjunta do processo de fornecimento das frutas até a geração dos produtos acabados para suprir a demanda é um aspecto importante deste trabalho. O trabalho utiliza como referência uma empresa típica do setor de produção de suco de laranja de distribuição internacional. No entanto, os conceitos aqui abordados são abrangentes o suficiente para serem aplicados a outras empresas similares do setor.

No sistema de mistura de suco de laranja, pode ocorrer a necessidade de decisões gerenciais envolvendo vários objetivos. Quando na elaboração do plano de mistura, deseja-se, além de minimizar os diversos custos envolvidos, que os produtos fiquem o mais próximo possível da média de suas especificações mínimas e máximas de *ratio*. Por exemplo, em um produto com especificações de *ratio* mínimo e máximo 14 e 15 respectivamente, é desejável que seu *ratio* fique o mais próximo possível da média 14,5. Dessa forma, neste trabalho também são discutidas metas com diferentes níveis de prioridades associados a elas. Os modelos propostos devem responder a algumas questões básicas como: quanto, quando e como devem ser produzidos os sucos, envolvendo operações desde a colheita das laranjas até o atendimento da demanda dos produtos. Os modelos devem fornecer tais resultados respeitando-se restrições dos recursos produtivos e visando a minimização de custos envolvidos.

Em outras palavras, o objetivo deste trabalho é propor abordagens para apoiar a tomada de decisão no planejamento agregado de produção deste setor. As considerações das curvas de maturação das laranjas no planejamento de colheita e do processo de mistura de diferentes tipos de bases para obtenção da especificação de *ratio* do produto acabado no planejamento da produção resultam em modelos de programação linear e programação de metas que incorporam grande parte das decisões envolvidas nesta cadeia de suprimentos. Este objetivo vem de encontro com as propostas de pesquisa futura em Munhoz e Morabito (2001a, b) de incorporar o planejamento de colheita ao problema e utilizar equações de mistura com cálculo de *ratio* resultante a partir da acidez dos diferentes componentes.

Estas extensões tornam os modelos ferramentas de suporte e análise à tomada de decisão mais poderosas e efetivas. Em pesquisa bibliográfica identificaram-se poucos trabalhos que trataram do tema otimização aplicada ao suco concentrado de laranja, como, por

exemplo, Pinto (1996), que utiliza programação linear inteira mista para apoiar a decisão sobre sistemas de distribuição de suco concentrado de laranja, e Caixeta Filho (1993, 2006), que apresenta uma modelagem matemática para o gerenciamento da programação de colheita da laranja. Porém, são os trabalhos de Munhoz (2000) e Munhoz e Morabito (2001a, b) que mais se aproximam da abordagem aqui proposta e servem de ponto de partida para este estudo. Sendo que, os autores desconhecem outros trabalhos na literatura com a presente abordagem para a indústria de suco de laranja. Outros estudos não relacionados ao suco de laranja, porém parcialmente relacionados à abordagem proposta neste trabalho e aplicados a outros setores agroindustriais, podem ser encontrados, por exemplo, em Junqueira e Morabito (2008), que apresentam um modelo de otimização linear para auxiliar nas decisões do planejamento tático da produção, estocagem e transporte de sementes de milho; e em Paiva (2006, 2009) e Paiva e Morabito (2007, 2009), que apresentam modelos de otimização linear e inteira mista para o planejamento agregado da produção em usinas de açúcar e álcool.

Este artigo está organizado em cinco seções. A seção 2 apresenta resumidamente o processo de produção do suco de laranja e seus subprodutos, assim como o planejamento das operações neste setor. Na seção 3, modela-se o problema de planejamento utilizando programação linear e resolve-se o modelo para diferentes cenários, analisando-se os resultados obtidos e explorando-se outras possíveis direções para a modelagem. Na seção 4, utiliza-se uma abordagem de programação por metas com diferentes níveis de prioridades associados a cada uma delas. Define-se como meta prioritária a minimização de custos, que faz parte do modelo da seção 3, e a meta secundária é otimizar o processo de mistura. Nas seções 3 e 4, foi utilizada a linguagem de modelagem GAMS e o *solver* CPLEX para resolver os modelos propostos. A análise dos modelos e dos resultados obtidos é feita ao final de cada seção. Finalmente, na seção 5, relacionam-se as abordagens deste estudo como ferramentas de apoio à tomada de decisão no planejamento agregado da produção de suco concentrado congelado de laranja e apresentam-se as conclusões e perspectivas para pesquisas futuras.

## 2 A indústria de suco de laranja e o processo de produção e de planejamento

Na sequência, é descrito brevemente como é o processamento da laranja e o respectivo planejamento das operações. Para melhor entendimento do processo, o Quadro 1 apresenta a terminologia relacionada utilizada na indústria cítrica, e a Figura 1 ilustra as principais etapas do processamento.

## 2.1 Descarregamento e processamento da fruta

Inicialmente a laranja é transportada até a fábrica por meio de caminhões que, ao chegarem à empresa, são descarregados por meio de rampas com acionamento hidráulico (Figura 1). A fruta é transportada por meio de correias e elevadores de canecas até os silos de estocagem de laranja. Durante o descarregamento da fruta, é coletada uma amostra representativa da carga do caminhão, para que seja feita a identificação das características físico-químicas desta. Entre as principais características estão o brix, *ratio* e variedade, as quais foram descritas na Tabela 1. Com base nas características físico-químicas da laranja e no plano de produção, é feita a retirada da fruta dos silos por meio de correias transportadoras e elevadores de canecas, a qual é encaminhada ao setor de lavagem e seleção. Neste setor, a laranja é lavada primeiro com água e, em seguida, com solução sanitizante, para a devida assepsia. Após a lavagem, a laranja passa por um processo de seleção, na qual são retiradas manualmente as frutas deterioradas e verdes (estas frutas são transportadas por bombeamento para o setor de produção do *pellet* de polpa cítrica, que é um subproduto da laranja utilizado como componente para ração animal). Uma vez lavada e selecionada, a fruta é transportada mais uma vez por correias transportadoras até o equipamento denominado classificador. Este equipamento classifica a laranja em três diferentes grupos conforme o tamanho da fruta (pequena, média e grande): suco com polpa; emulsão água com óleo e fragmentos de casca da laranja; e bagaço da laranja.

O bagaço da laranja é conduzido por meio de roscas transportadoras até o setor chamado de ração. Neste setor o bagaço é armazenado em um silo (vide caixa de bagaço na Figura 1), a partir do qual passa por uma sequência de equipamentos (que são descritos a seguir), até resultar nos subprodutos: D'limonene, que é utilizado na fabricação de solventes, resinas, entre outros; e o *pellet* de polpa cítrica, que

é utilizado como um componente na fabricação de ração animal. O bagaço da laranja é retirado do silo por roscas transportadoras, quando ocorre a adição de cal (vide silo de cal na Figura 1), que tem por funções corrigir o pH e tornar o bagaço da laranja menos viscoso (KESTERSON; BRADDOCK, 1976), proporcionando, assim, mais facilidade de prensagem em outra etapa. Em seguida, o bagaço é triturado em moinhos tipo martelo e enviado por bombeamento para um tanque (vide tanque reator na Figura 1), que tem por função retardar o envio deste para a próxima etapa do processo, a fim de que a cal tenha tempo suficiente para reagir com o bagaço.

Após o tanque, o bagaço passa por um sistema de peneiramento e prensagem, para retirar o líquido (licor) contido no bagaço. Neste momento tem-se duas fases: o licor e o bagaço. O licor é enviado por bombeamento para evaporadores, que extraem o subproduto denominado D'limonene. O D'limonene extraído neste ponto é bombeado para tanques para, em seguida, ser estocado em tambores ou comercializado a granel. O bagaço proveniente da etapa de prensagem é enviado, por roscas transportadoras, para a secagem em secador do tipo rotativo. Os gases utilizados na secagem do bagaço são usados como forma de energia nos evaporadores e a palha (bagaço seco) é, finalmente, peletizada, resfriada e armazenada em silos, para, posteriormente, ser comercializada na forma de *pellets* de polpa cítrica.

Retornando ao setor de extração, tem-se a fase de emulsão água com óleo e fragmentos de casca de laranja, que é encaminhada, por roscas transportadoras, ao setor de produção de óleo essencial de laranja. Neste setor, esta emulsão passa primeiramente por um sistema de peneiramento e filtragem para retirar o máximo de solução água e óleo de laranja dos fragmentos de casca. Os fragmentos de casca são transportados, juntamente com o bagaço da laranja, para o silo de bagaço do setor da ração. A solução água e óleo é separada por centrifugação, e a água é reutilizada no setor de extração, neste mesmo

**Quadro 1.** Terminologia utilizada na indústria cítrica.

Caixa de fruta	Unidade de peso equivalente a 40,8 kg ou 90 lb
Brix	Refere-se à porcentagem de sólidos solúveis ou açúcares e ácidos, sendo quantificado em graus brix por meio de refratômetro. O refratômetro é um instrumento utilizado para medir o índice de refração de soluções.
Acidez	Depois dos açúcares, os ácidos são os sólidos solúveis presentes em maior quantidade no suco. O teor de ácidos é determinado por titulação.
Ratio	É a relação brix/acidez e fornece o grau de maturação e qualidade do suco.
Variedade	As variedades de laranja Pera, Natal e Valência são as mais indicadas para a industrialização, enquanto a variedade Hamlin, por ser mais precoce, permite que a fábrica opere economicamente no início da safra, mas fornece um suco de qualidade inferior e de pouca aceitação no mercado.



processo de recuperação de óleo essencial. Enquanto isso, o óleo é encaminhado para tanques com baixas temperaturas (vide desceramento na Figura 1), que têm por função retirar a cera contida neste. Após o processo de desceramento, o óleo essencial está pronto para comercialização em tambores de 200 L ou a granel.

De volta ao setor de extração, tem-se a fase suco com polpa, que é transportada por gravidade ao setor de filtragem e centrifugação. Neste setor, é retirado do suco o excesso de polpa e outros defeitos que possam estar nele incorporados, além de se efetuar o ajuste do teor de polpa do produto dentro dos padrões desejados. A polpa retirada do suco nesta etapa é utilizada na produção do subproduto conhecido como *pulp wash* (polpa lavada), que vem a ser um suco com qualidade inferior. O processo de produção do *pulp wash* consiste na lavagem da polpa retirada do suco com água em contra fluxo e posterior concentração deste em evaporadores de múltiplos estágios com filme descendente, e, pela combinação de temperatura e vácuo, concentra-se o produto até a especificação desejada. Na sequência, o produto é resfriado em trocadores de calor e estocado a baixas temperaturas em câmaras frigoríficas até o momento da comercialização que, usualmente, é feita em tambores metálicos de 200 L.

Retornando ao suco, que está com o teor de polpa desejado, o processo de industrialização segue, da mesma forma que no *pulp wash*, pela concentração do suco, até a especificação desejada em evaporadores de múltiplos efeitos com filme descendente. Depois de concentrado, resfria-se o suco e armazena-se este a granel em câmaras frigoríficas. Neste momento, tem-se o suco na forma de bases, que pode se entender como sendo um primeiro estágio de um processo de planejamento da produção. Em um segundo estágio, tem-se o processo de mistura das diversas bases de suco de forma a obterem-se os produtos finais (vide *blender* na Figura 1). Quando o suco está sendo concentrado nos evaporadores, ocorre a extração de outros dois subprodutos conhecidos por *oil phase* e *water phase*, que, na sequência, são armazenados em tambores metálicos de 200 L prontos para serem comercializados.

## 2.2 O processo de mistura

As bases de suco, que estão armazenadas em câmaras frigoríficas com tanques em aço inoxidável, são bombeadas para tanques localizados no setor denominado *blender* em diferentes quantidades, de forma tal que se obtenha um produto dentro das especificações predeterminadas. Uma vez completado o tanque *blender* com as quantidades especificadas de bases, coleta-se uma amostra representativa deste e efetua-se um conjunto de análises físico-químicas,

organolépticas (diz-se das propriedades das substâncias que impressionam os sentidos; no caso em estudo, propriedades do suco que impressionam o paladar, tais como: acidez, amargor, adstringência, etc.) e microbiológicas do produto, para verificação da conformidade com as especificações.

Estando o produto conforme as especificações predeterminadas, este é bombeado novamente para as câmaras frigoríficas, para posterior embarque a granel, ou envasado em tambores metálicos de 200 L, para posterior comercialização. O cálculo da quantidade de cada base a ser utilizada na mistura para resultar um *ratio* (brix/acidez) pré-estabelecido, é feito conforme a seguinte equação linear (Equação 1):

$$\begin{aligned} AQ &= A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \dots + A_n Q_n \\ \text{com } Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (1) \\ R &= B/A \end{aligned}$$

em que:

$R$  = *ratio* final desejado para o produto acabado;  
 $A$  = acidez final desejada para o produto acabado;  
 $Q$  = quantidade desejada de produto acabado;  
 $A_i$  = acidez da base de suco  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  
 $Q_i$  = quantidade de base de suco  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); e  
 $B$  = brix final médio do produto acabado, que, no caso do problema, é 66, ou seja, 66% do produto é composto por sólidos solúveis (vide definição de brix no Quadro 1).

Para algumas bases, além do cálculo acima, especificam-se também as quantidades limites (em porcentagem) de determinadas bases a serem adicionadas ao produto final. Nesse contexto, o planejamento utilizado para este trabalho se dá no nível tático da organização, quando se analisam simultaneamente os estoques de passagem de uma safra para outra, um plano de demanda por produtos acabados e um plano de disponibilidade de matéria-prima. A capacidade dos recursos produtivos é uma restrição particularmente importante.

O plano de disponibilidade de laranja, que também pode ser chamado de planejamento de colheita, é elaborado a partir de diversos parâmetros, com destaque para a curva que representa a evolução da maturação da fruta ao longo do tempo, aqui representada pelo parâmetro *ratio*, conforme definido no Quadro 1. O setor cítrico deposita grande esforço na tentativa de entender o comportamento deste parâmetro, sendo que a principal linha utilizada pelas empresas é baseada em métodos estatísticos, que se resumem na análise de amostras de frutas, técnicas de regressão, combinado com dados históricos e análise de especialistas sobre fatores diversos que impactam o processo de maturação (por exemplo, clima, solo, trato de pomares, entre outros), gerando diferentes curvas que representam a evolução do *ratio* da laranja ao longo do tempo. A Figura 2 ilustra uma curva de

maturação para uma laranja tipo precoce, sendo que o *ratio* desta fruta varia ao longo do tempo.

### 3 Abordagem de programação linear

#### 3.1 Modelagem do problema

Conforme mencionado, o ponto de partida para a modelagem aqui proposta vem dos trabalhos de Munhoz (2000) e Munhoz e Morabito (2001a, b). A modelagem a seguir agrega a sugestão desses trabalhos de incorporar o planejamento de colheita ao problema. Além disso, o presente modelo utiliza equações de mistura com base na acidez da laranja, ao invés de utilizar o *ratio* da fruta, como no modelo anterior. Calcular o *ratio* médio resultante de uma mistura, a partir do *ratio* dos diferentes componentes da mistura, oferece um bom referencial para efeito da abordagem de planejamento deste trabalho. Porém, para se obter o *ratio* resultante de uma mistura de forma mais precisa, é necessário fazer os cálculos a partir da acidez dos diferentes componentes da mistura.

O procedimento de cálculo da necessidade de matéria-prima (laranja) ao longo do horizonte de planejamento (uma safra) para atender à demanda dos produtos acabados, alinhada a uma política de cobertura de estoques para esses itens finais, é o cerne da modelagem. Como forma de viabilizar a geração do produto final, frente a limitações relacionadas à sazonalidade da disponibilidade da matéria-prima ao longo do horizonte de planejamento, é utilizado o procedimento de mistura de diversas bases de suco, ou seja, efetua-se o planejamento da produção em dois estágios: no primeiro estágio, ocorre o processamento da laranja gerando produtos intermediários (bases de suco); e, no segundo estágio, efetua-se a mistura das diversas bases de suco de forma a se obter os produtos finais.

A modelagem utiliza programação linear (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 1990; HILLIER; LIEBERMAN, 1995) e conceitos conhecidos da literatura de problemas de mistura e planejamento de produção com múltiplos produtos, estágios e períodos, conforme, por exemplo, em Ackoff (1962), Johnson

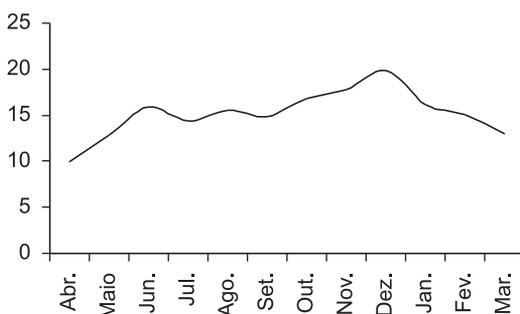


Figura 2. Exemplo de curva de maturação da laranja.

e Montgomery (1974), Williams (1978), Schrage (1986, 2001), Nahmias (1993), Shapiro (1993), Al-Shammari e Dawood (1997) e Arenales et al. (2007). O objetivo do problema é minimizar o custo total com matéria-prima, estoques e falta de produto ao longo do horizonte de planejamento. As principais restrições para esse processo dizem respeito às especificações de qualidade da mistura, capacidade da produção, balanceamento de material e período de disponibilidade de matéria-prima.

O modelo também utiliza conceitos de planejamento agregado e hierárquico (HAX; MEAL, 1975). A relevância da agregação de produtos para se obter modelos efetivos é reconhecida por diversos pesquisadores há algum tempo, como, por exemplo, em Geoffrion (1977), Zipkin (1982), Axsater e Jonsson (1984) e Shapiro (2001). A aplicação de conceitos de planejamento agregado está relacionada ao agrupamento dos diversos produtos demandados pelo mercado em famílias e, por conveniência, também se agrega a capacidade de processamento de produção como um todo e não por unidade produtiva. Isso é interessante para empresas como a do presente estudo, com diversas unidades produtivas. A aplicação de conceitos de planejamento hierárquico se dá no aspecto de que o processo de planejamento tático fica subordinado ao planejamento estratégico do negócio.

Na sequência é apresentado o modelo genérico de otimização linear para este problema.

#### a) Índices

- $i$  = família de suco, que é referenciada apenas como suco;
- $t$  = período de planejamento (mês);
- $j$  = família de laranja que gera uma base de suco, que será referenciado apenas como laranja e base, respectivamente;
- $f$  = fornecedor de laranja  $f$ ; este índice incorpora ao modelo a obtenção de laranjas a partir de fontes diversas, como, por exemplo, fruta própria, fruta adquirida por meio de contratos de longo prazo, fruta adquirida no mercado *spot*, entre outras fontes de fornecimento; e
- $g$  = tipo de laranja  $g$ ; este índice diferencia laranjas que apresentam diferentes curvas de maturação ao longo de uma safra.

#### b) Dados fornecidos

$EL_{jg0}$  = estoque inicial ( $t = 0$ ) de laranja base no fornecedor  $f$  do tipo  $g$  em caixas de laranja de 40,8 kg;

$ELH_{f0}$  = estoque inicial ( $t = 0$ ) de laranja precoce no fornecedor  $f$  em caixas de laranja de 40,8 kg;

$HS_0$  = estoque inicial ( $t = 0$ ) de suco  $i$  em toneladas;  
 $HH_0$  = estoque inicial ( $t = 0$ ) de precoce em toneladas;

$HB_{j0}$  = estoque inicial ( $t = 0$ ) de base  $j$  em toneladas;  
 $FS_0$  = falta de estoque inicial ( $t = 0$ ) de suco  $i$  em toneladas;

$FH_0$  = falta de estoque inicial ( $t = 0$ ) de precoce  $i$  em toneladas;

$FB_{j0}$  = falta de estoque inicial ( $t = 0$ ) de base  $j$  em toneladas;

$DTH_t$  = máximo de dias disponíveis para processamento no período  $t$ ;

$DTL_t$  = mínimo de dias disponíveis para processamento no período  $t$ ;

$CP_t$  = capacidade de processamento diária no período  $t$  em caixas de laranja de 40,8 kg;

$RatioSH_i$  = ratio máximo do suco  $i$ ;

$RatioSL_i$  = ratio mínimo do suco  $i$ ;

$RatioB_j$  = ratio da base  $j$ ;

$RatioH$  = ratio esperado da precoce;

$PorcentagemH_{jt}$  = porcentagem esperada de precoce possível de se adicionar na base  $j$  no período  $t$ ;

$RendimentoB_{jt}$  = rendimento industrial esperado da laranja  $j$  gerando a base  $j$  no período  $t$  em caixas de laranja/tonelada;

$RendimentoH_t$  = rendimento industrial esperado da laranja precoce gerando base precoce no período  $t$  em caixas de laranja/tonelada;

$Demanda_{it}$  = demanda esperada do suco  $i$  no período  $t$  em toneladas;

$CustoHS_{it}$  = custo de armazenagem do suco  $i$  no período  $t$  (unidades monetárias/tonelada);

$CustoHH_t$  = custo de armazenagem de precoce no período  $t$  (unidades monetárias/tonelada);

$CustoHB_{jt}$  = custo de armazenagem de base  $j$  no período  $t$  (unidades monetárias/tonelada);

$CustoFS_{it}$  = custo de falta do suco  $i$  no período  $t$  (unidades monetárias/tonelada);

$CustoFH_t$  = custo de falta de precoce no período  $t$  (unidades monetárias/tonelada);

$CustoFB_{jt}$  = custo de falta da base  $j$  no período  $t$  (unidades monetárias/tonelada);

$CustoQL_{fgt}$  = custo da laranja base do fornecedor  $f$  do tipo  $g$  no período  $t$  (unidades monetárias/caixa de 40,8 kg);

$CustoQLH_{ft}$  = custo da laranja precoce do fornecedor  $f$  no período  $t$  (unidades monetárias/caixa de 40,8 kg);

$DL_{fgt}$  = indica se tem disponibilidade da laranja base  $j$  do fornecedor  $f$  do tipo  $g$  no período  $t$  ( $0 =$  não tem;  $1 =$  tem); e

$DH_{ft}$  = indica se tem disponibilidade da laranja precoce do fornecedor  $f$  no período  $t$  ( $0 =$  não tem;  $1 =$  tem).

Para computar as tabelas com parâmetros para disponibilidade da laranja ( $DL_{fgt}$  e  $DH_{ft}$ ) ao longo do horizonte de planejamento, são utilizadas projeções com base em dados históricos e informações de especialistas, que vêm a ser as curvas de maturação das laranjas. Esses parâmetros podem assumir valores 0 ou 1, significando, por exemplo, que se  $DL_{fgt} = 1$ , então se tem disponibilidade da laranja base  $j$  no fornecedor  $f$  do tipo  $g$  no período  $t$ .

$CF_{ft}$  = capacidade de fornecimento de laranja (base e precoce) do fornecedor  $f$  no período  $t$  em caixas de laranja de 40,8 kg

### c) Dados calculados

$CPH_t$  = capacidade de processamento industrial máxima no período  $t$  em caixas de laranja de 40,8 kg;

$CPL_t$  = capacidade de processamento industrial mínima no período  $t$  em caixas de laranja de 40,8 kg

$ASH_i$  = acidez máxima do suco  $i$ ;

$ASL_i$  = acidez mínima do suco  $i$ ;

$AB_j$  = acidez da base  $j$ ;

$AH$  = acidez da precoce.

### d) Cálculos

$$CPH_t = CP_t \times DTH_t \quad \forall t$$

$$CPL_t = CP_t \times DTL_t \quad \forall t$$

Estes cálculos são para computar as capacidades máxima ( $CPH_t$ ) e mínima ( $CPL_t$ ) de processamento por período de planejamento  $t$ . Esses resultados são utilizados na construção das restrições de capacidade de processamento na modelagem em questão.

$$ASH_i = 66/RatioSL_i \quad \forall i$$

$$ASL_i = 66/RatioSH_i \quad \forall i$$

$$AB_j = 66/RatioB_j \quad \forall j$$

$$AH = 66/RatioH$$

Estes cálculos são para computar a acidez máxima do suco  $i$  ( $ASH_i$ ), acidez mínima do suco  $i$  ( $ASL_i$ ), acidez da base  $j$  ( $AB_j$ ) e acidez da precoce ( $AH$ ). Observa-se que a constante 66 das equações acima se refere ao brix final médio do produto acabado, ou seja, 66% do produto é composto por sólidos solúveis (vide definição de brix no Quadro 1). Isso se faz necessário, pois as restrições de mistura são baseadas na acidez dos vários componentes da mistura e da acidez do produto final.

**e) Variáveis de decisão**

$QL_{fgjt}$  = quantidade de laranja  $j$  gerando base  $j$  a ser processada no período  $t$  proveniente do fornecedor  $f$  do tipo  $g$ , em caixas de 40,8 kg; e  $QLH_{jt}$  = quantidade de laranja precoce gerando base precoce no período  $t$  proveniente do fornecedor  $f$ , em caixas de 40,8 kg.

As variáveis de decisão  $QL_{fgjt}$  e  $QLH_{jt}$  definem o plano de colheita e processamento de laranjas para se realizar o plano de produção e mistura de suco requerido pelo modelo. Cabe ressaltar que a geração do plano de colheita, assim como do plano de produção e de mistura, vêm da resolução do modelo como um todo.

- $QS_{it}$  = quantidade de suco  $i$  produzido no período  $t$  em toneladas;
- $QHP_t$  = quantidade de precoce produzida no período  $t$  em toneladas;
- $QBP_{jt}$  = quantidade de base  $j$  produzida no período  $t$  em toneladas;
- $QH_{jit}$  = quantidade de precoce consumida na base  $j$  para produzir suco  $i$  no período  $t$  em toneladas;
- $QB_{jit}$  = quantidade de base  $j$  consumida para produzir suco  $i$  no período  $t$  em toneladas;
- $HS_{it}$  = estoque de suco  $i$  no período  $t$  em toneladas;
- $HH_t$  = estoque de precoce no período  $t$  em toneladas;
- $HB_{jt}$  = estoque de base  $j$  no período  $t$  em toneladas;
- $FS_{it}$  = falta de suco  $i$  no período  $t$  em toneladas;
- $FH_t$  = falta de precoce no período  $t$  em toneladas;
- $FB_{jt}$  = falta de base  $j$  no período  $t$  em toneladas;
- $EL_{fgt}$  = estoque de laranja base no fornecedor  $f$  do tipo  $g$  no período  $t$  em caixas de laranja de 40,8 kg; e
- $ELH_{ft}$  = estoque de laranja precoce no fornecedor  $f$  no período  $t$  em caixas de laranja de 40,8 kg.

**f) Função objetivo**

A função objetivo (Equação 2) é composta pela soma do custo total da matéria-prima; da soma do custo total de armazenagem de suco, base e precoce e; da soma do custo total de falta de suco, base e precoce. O custo da matéria-prima, além de ser minimizado relativamente ao período de processamento e na relação precoce *versus* base, também é minimizado em relação ao fornecedor  $f$  e ao tipo de base  $g$ .

$$\begin{aligned}
 Z = & \min \sum_f \sum_g \sum_t \sum_j \text{Custo} QL_{fgt} \times QL_{fgjt} + \\
 & + \sum_f \sum_t \text{Custo} QLH_{ft} \times QLH_{ft} + \\
 & + \sum_t \sum_i (\text{Custo} HS_{it} \times HS_{it} + \text{Custo} FS_{it} \times FS_{it}) + \quad (2) \\
 & + \sum_t (\text{Custo} HH_t \times HH_t + \text{Custo} FH_t \times FH_t) + \\
 & + \sum_t \sum_j (\text{Custo} HB_{jt} \times HB_{jt} + \text{Custo} FB_{jt} \times FB_{jt})
 \end{aligned}$$

**g) Restrições**

Restrição do nível total de processamento desse planejamento tático respeitar (planejamento hierárquico) a definição estratégica de nível de processamento (Equação 3):

$$\begin{aligned}
 \sum_f \sum_g \sum_t \sum_j QL_{fgjt} + \sum_f \sum_t QLH_{ft} & \geq \\
 \geq \sum_f \sum_g EL_{fg0} + \sum_f ELH_{f0} - \quad (3) \\
 - \sum_g EL_{n\text{spot}g0} - ELH_{n\text{spot}0}
 \end{aligned}$$

A expressão 3 determina que se deva processar no mínimo a fruta de todos os tipos de contratos com exceção dos contratos tipo *spot*. Ou seja, nessa modelagem apenas ocorrerá formação de estoque de produto se a quantidade de laranja disponível para o horizonte de planejamento, de todos os tipos de contratos com exceção dos contratos tipo *spot*, for maior que a quantidade necessária de laranja para produzir o volume de suco demandado no horizonte de planejamento em questão.

Restrições de níveis máximo e mínimo de processamento industrial (Equação 4):

$$CPL_t \leq \sum_f \sum_g \sum_j QL_{fgjt} + \sum_f QLH_{ft} \leq CPH_t \quad \forall t \quad (4)$$

A expressão 4 define que a quantidade de laranja processada em cada período  $t$  deve ser maior que o parâmetro de capacidade mínima de processamento ( $CPL_t$ ), e menor que o parâmetro de capacidade máxima de processamento ( $CPH_t$ ). Convém notar que a quantidade de laranja ( $QL_{fgjt}$  e  $QLH_{ft}$ ) está desdobrada, também, por fornecedor  $f$  e por tipo de laranja  $g$ .

Equações de balanço de material (Equações 5 a 7):

$$\begin{aligned}
 QS_{it} - Demanda_{it} + HS_{i(t-1)} - \\
 - FS_{i(t-1)} - HS_{it} + FS_{it} = 0 \quad \forall i, t \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 QHP_t - \sum_j \sum_i QH_{jit} + HH_{(t-1)} - \\
 - FH_{(t-1)} - HH_t + FH_t = 0 \quad \forall t \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QBP_{jt} - \sum_i QB_{jti} + HB_{j(t-1)} - \\ - FB_{j(t-1)} - HB_{jt} + FB_{jt} = 0 \quad \forall j, t \end{aligned} \quad (7)$$

As Equações 5 a 7 fornecem o estoque (ou falta) de cada produto  $i$  (Equação 5), base  $j$  (Equação 7) e precece (Equação 6), ao final de cada período de planejamento  $t$ . O resultado é composto pela soma do estoque do período anterior (ou menos a falta originada no período anterior), mais tudo o que foi produzido no período  $t$ , menos tudo o que foi consumido (demandado) no período  $t$ .

Expressões de mistura para obtenção dos produtos finais conforme especificações a partir de bases e precoces (Expressões 8 a 11):

$$\begin{aligned} \left[ \sum_j (QB_{jti} \times AB_j + QH_{jti} \times AH) \right] / \\ / ASH_i \leq \sum_j (QB_{jti} + QH_{jti}) \quad \forall i, t \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left[ \sum_j (QB_{jti} \times AB_j + QH_{jti} \times AH) \right] / \\ / ASL_i \geq \sum_j (QB_{jti} + QH_{jti}) \quad \forall i, t \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} QH_{jti} \leq \text{Porcentagem}H_{jt} \times \\ \times (QB_{jti} + QH_{jti}) \quad \forall j, i, t \end{aligned} \quad (10)$$

$$QS_{it} = \sum_j (QB_{jti} + QH_{jti}) \quad \forall i, t \quad (11)$$

As desigualdades, Expressões 8 e 9 são restrições que asseguram o limite máximo (Expressão 8) e mínimo (Expressão 9) da acidez para cada produto final  $i$  e para cada período  $t$ , a partir da combinação das diversas bases  $j$  e precece. As inexpressões (Expressão 10) garantem a quantidade máxima permitida de precece (*Porcentagem* $H_{jt}$ ) adicionada a cada base  $j$  para produzir o suco  $i$  em cada período  $t$ . A Expressão 11 determina que as quantidades de suco, por período, as quais devem ser iguais à soma das quantidades de base  $j$  e precece.

Expressões de relação de quantidade de laranja gerando quantidades de bases e precoces, incorporando o fator disponibilidade de fruta nos cálculos (Expressões 12 a 15):

$$QL_{fgjt} \leq EL_{fg0} \times DL_{fgjt} \quad \forall f, g, j, t \quad (12)$$

$$QLH_{ft} \leq ELH_{f0} \times DH_{ft} \quad \forall f, t \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum_f \sum_g QL_{fgjt} - QBP_{jt} \times \\ \times \text{Rendimento}B_{jt} = 0 \quad \forall j, t \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_f QLH_{ft} - QHP_t \times \\ \times \text{Rendimento}H_t = 0 \quad \forall t \end{aligned} \quad (15)$$

As Expressões 12 e 13 definem que o processamento de laranja ( $QL_{fgjt}$  e  $QLH_{ft}$ ) só ocorre quando existe a disponibilidade dessa laranja. Convém lembrar que  $DL_{fgjt}$  indica se há disponibilidade e, neste caso, é igual a 1 na Expressão 12 (similarmente para  $DH_{ft}$  na Expressão 13). Da mesma forma, se o parâmetro  $DL_{fgjt}$  assumir valor igual a zero, ele garante que a quantidade processada ( $QL_{fgjt}$ ) será nula (o mesmo é válido para  $DH_{ft}$  na Expressão 13). A Expressão 14 definem que a quantidade de base ( $QBP_{jt}$ ) é produzida a partir da quantidade de laranja processada ( $QL_{fgjt}$ ) para cada período de planejamento  $t$  (note que a quantidade de laranja ( $QL_{fgjt}$ ) está desdobrada, também, por fornecedor  $f$  e por tipo de laranja  $g$ ). A Expressão 15 definem que a quantidade de precece ( $QHP_t$ ) é produzida a partir da quantidade de laranja precece processada ( $QLH_{ft}$ ) para cada período de planejamento  $t$ .

Expressões de balanço de material para fornecimento de laranja (Expressões 16 e 17):

$$EL_{fgt} - EL_{fg(t-1)} + \sum_j QL_{fgjt} = 0 \quad \forall f, g, t \quad (16)$$

$$ELH_{ft} - ELH_{f(t-1)} + QLH_{ft} = 0 \quad \forall f, t \quad (17)$$

As Expressões 16 e 17 definem a evolução do estoque de laranja ( $EL_{fgt}$  e  $ELH_{ft}$ ) ao longo do horizonte de planejamento por fornecedor  $f$  e por tipo de laranja  $g$  ou precece. Restrição de capacidade de fornecimento de laranja (Expressões 18):

$$\sum_j \sum_g QL_{fgjt} + QLH_{ft} \leq CF_{ft} \quad \forall f, t \quad (18)$$

A Expressão 18 definem que o fornecimento de laranja para cada fornecedor  $f$  a cada período  $t$  deve ser no máximo igual à capacidade de fornecimento do referido fornecedor  $f$  no dado período  $t$ . Essas restrições são necessárias para agregar o planejamento de colheita ao modelo em questão.

Finalmente, tem-se que todas as variáveis de decisão do modelo são não negativas.

### 3.2 Análise da solução

O modelo apresentado na seção 3.1 possui as seguintes características comumente encontradas em empresas do setor cítrico:

- O modelo considera o processo de planejamento parcialmente orientado pela demanda por produto acabado e parcialmente orientado pela disponibilidade de matéria-prima. A fruta própria da empresa, assim como a fruta previamente contratada, são dados de entrada para o planejamento. Essa base de matéria-prima deve ser totalmente utilizada, ou seja, configura um processo de empurrar o fornecimento de material para dentro do sistema. Por outro lado, há outra parte de matéria-prima disponível que não está contratada (normalmente contratos de curto prazo e *spot*), e a utilização desta matéria-prima orientada pela demanda de sucos configura um processo de puxar o fornecimento de material para dentro do sistema. Esses aspectos estão devidamente representados no modelo, em que a solução consome a parcela empurrada e utiliza apenas o mínimo necessário da parcela puxada, conforme determinação da demanda por produtos acabados;
- O modelo incorpora adequadamente a dependência do *ratio* do suco produzido em relação ao período da colheita da laranja, ou seja, uma mesma laranja pode dar origem a diferentes *ratios* de suco em função de sua curva de maturação. Quanto mais tempo a laranja ficar no pomar, maior será o seu *ratio*;
- A solução do modelo responde adequadamente ao objetivo de minimizar os custos da matéria-prima, manutenção de estoques de produtos, assim como os custos de falta de produto;
- O modelo incorpora expressões de balanceamento de material para laranja e suco, em que a solução reflete corretamente o comportamento esperado dos estoques e faltas de produtos e matéria-primas ao longo do horizonte de planejamento;
- O modelo é fiel à característica de planejamento hierárquico que determina que se deva processar no mínimo a fruta de todos os tipos de contratos, exceção aos contratos tipo *spot* que ficam subordinados à demanda por produtos acabados;
- O modelo incorpora de forma apropriada as restrições de capacidade de processamento industrial, assim como de fornecimento de matéria-prima; e
- As expressões de mistura estão contidas no modelo, e a solução demonstra a coerente utilização dos vários tipos de suco em um processo de mistura, visando a obtenção de um determinado produto acabado.

Com o objetivo de avaliar o comportamento do modelo proposto, elaboraram-se diversos cenários baseados na situação real da empresa, variando-se os parâmetros de entrada e avaliando-se a coerência dos resultados do modelo diante dessas variações. A análise crítica dos resultados fornecidos pelo modelo frente aos diferentes parâmetros de entrada foi feita por um gestor da empresa, com experiência de mais de vinte anos no setor de suco de laranja, dos quais oito anos são na atividade de planejamento das operações e, também, por outro gestor da empresa em planejamento de matéria-prima, com experiência neste tipo de planejamento e em modelos de otimização.

Os principais parâmetros de entrada utilizados para avaliar a consistência do modelo frente aos diversos cenários, assim como os detalhes dos resultados obtidos do modelo para cada cenário, podem ser consultados em Munhoz (2009). Na sequência, apresenta-se uma discussão resumida desses resultados. Como o modelo envolvido é de otimização linear, os tempos computacionais para resolvê-lo em cada cenário, utilizando a linguagem de modelagem GAMS 19.6 com o resolvidor CPLEX 7.0 (BROOKE; KENDRICK; MEERAUS, 1992), foram bem aceitáveis: da ordem de poucos segundos em um microcomputador com processador Intel(R) CPU T2300, 1.66 GHz e 0.99 GB de memória RAM. O modelo contém 2.184 variáveis e 1.885 restrições.

O cenário inicial escolhido é composto de doze meses de planejamento, sete famílias ou bases de laranja (“Precoce”, “BA11”, “BA13”, “BA14”, “BA15”, “BA16” e “BA17”), com diferentes níveis de acidez (consequentemente, *ratio*) em cada mês, quatro famílias de produtos finais (“PA11”, “PA13”, “PA14” e “PA15”), e cinco tipos de fornecedores de laranja com dois tipos de laranja. Este cenário utiliza valores para os diversos parâmetros de forma a possibilitar a análise dos resultados relativamente ao comportamento esperado do sistema. O plano de mistura ótimo obtido apresenta os produtos acabados com especificação de *ratio* dentro dos limites estabelecidos, assim como respeita o limite máximo de consumo de base precoce de suco (máximo 15%), o que é demonstrado, por exemplo, na Tabela 1. A Tabela 1 é composta por quadros, representando cada produto final; linhas, representando os diferentes períodos de planejamento; e colunas, indicando quanto de cada componente deve ser consumido em cada período de planejamento. As últimas colunas de cada quadro indicam a acidez, o *ratio* e a porcentagem de precoce adicionada para o produto acabado resultante em cada período, respectivamente. Por exemplo, note que para se produzir 1.500 t de produto acabado “PA13” no período (mês) 1 são necessárias 225 t de “precoce”, 633 t de base “BA11” e 642 toneladas de

base “BA14”. Essa mistura resulta em uma acidez 5,077, *ratio* 13,0 e uma adição de 15% de “precoce”, resultados esses que estão dentro das especificações impostas pelo modelo.

A partir do cenário inicial (cenário 1), elaborou-se o cenário 2. Nesse cenário, eliminou-se a disponibilidade de fruta do fornecedor de laranja *spot* para os tipos de laranja “precoce”, “média” e “tardia”. Como resultados principais, tem-se: não ocorre fornecimento desses tipos de laranja do fornecedor *spot*; e, conseqüentemente, ocorre falta de bases para produção de suco. Estes resultados eram os esperados pelos gestores da empresa para essa situação. Novamente, a partir do cenário 1, alterou-se o parâmetro de estoque inicial de base, gerando o cenário 3. Como resultados principais desse cenário, tem-se: o custo total (função objetivo) reduz sensivelmente devido à menor necessidade de laranja, que é o principal custo desse processo; não há falta de produto no final do horizonte de planejamento; não há estoques de produtos finais, bases e precoce no final do horizonte de planejamento. Estes resultados também eram os esperados pelos gestores da empresa para essa simulação.

A partir do cenário 1, também se elevou o custo da laranja precoce do fornecedor *spot*, gerando-se o cenário 4. Como resultados principais do cenário 4, tem-se: não há consumo de laranja “precoce” do fornecedor de laranja *spot*; e, conseqüentemente, uma menor produção de suco tipo “precoce”. Novamente, os resultados são consistentes para tal cenário. Finalmente, a partir do cenário 1, eliminou-se a demanda por suco “PA11”. Como resultados principais, tem-se: uma menor necessidade de geração de produtos acabados, bases e precoce, que, por sua vez, reduz a necessidade de laranjas e, conseqüentemente, um menor custo total. Resultados esses que eram os esperados pelos gestores da empresa para essa situação.

Os dados e resultados completos de todos estes cenários estão detalhados em Munhoz (2009), além de outras análises. Com isso observa-se que a presente modelagem é consistente. A partir do modelo apresentado nesta seção, incorporam-se conceitos de programação por metas no sentido de, uma vez minimizado os custos, buscar a otimização do processo de mistura, o que é discutido a seguir.

## 4 Abordagem de programação por metas visando otimizar o processo de mistura

### 4.1 O modelo de programação por metas

Conforme Munhoz e Morabito (2001a, b), no sistema de mistura de suco de laranja, pode ocorrer a necessidade de decisões gerenciais envolvendo

vários objetivos. Quando na elaboração do plano de mistura, deseja-se, além de minimizar custos, que os produtos fiquem o mais próximo possível da média de suas especificações mínimas e máximas de *ratio*. Por exemplo, em um produto com especificações de *ratio* mínimo e máximo 14 e 15, respectivamente, é desejável que seu *ratio* fique o mais próximo possível da média 14,5. Dessa forma, no modelo da seção 3.1, pode-se definir metas com diferentes níveis de prioridades, tais como (para mais detalhes de programação por metas, veja, e.g., HAX; CANDEA, 1984; OZAN, 1986; WINSTON, 1991):

- Meta 1, de maior prioridade, é minimizar o custo total. Nesse modelo o custo total é a soma dos custos da matéria-prima (laranja), da armazenagem de produtos (sucos) e falta de produtos.
- Meta 2, de prioridade secundária, é minimizar o desvio da especificação de *ratio* médio para os diversos produtos.

Definindo-se as variáveis de desvio do modelo conforme a Tabela 2, obtém-se uma nova função objetivo, para substituir a função objetivo (2) do modelo (2)-(18) da seção 3.1, dada pela Expressão 19:

$$\min P_1 (s_1^+) + P_2 \left( \sum_i c_i (s_{2it}^+ + s_{2it}^-) \right) \quad (19)$$

em que se admite que  $P_1 \gg P_2$  (i.e., a prioridade da meta 1 é muito maior do que a da meta 2) e  $c_i$  é um peso relativo para cada produto  $i$  (neste trabalho, por conveniência, utilizou-se  $c_i = 1$ ). É necessário definir ainda mais um parâmetro para o *ratio* médio:  $RatioSM_i = ratio$  médio do suco  $i$ ;

que, por sua vez, necessita do cálculo a seguir para obter a acidez média ( $ASM_i$ ):  $ASM_i = 66/RatioSM_i$ .

Por fim, adicionaram-se ao modelo as seguintes restrições de metas 1 e 2:

Restrição da meta 1, obtida a partir da função objetivo (2) do modelo apresentado na seção 3.1 (Equação 20):

$$\begin{aligned} & \sum_f \sum_g \sum_t \text{Custo} QL_{fgt} \times QL_{fgt} + \\ & + \sum_f \sum_t \text{Custo} QLH_{ft} \times QLH_{ft} + \\ & + \sum_i \left( \text{Custo} HS_{it} \times HS_{it} + \text{Custo} FS_{it} \times FS_{it} \right) + \\ & + \sum_i \left( \text{Custo} HH_t \times HH_t + \text{Custo} FH_t \times FH_t \right) + \\ & + \sum_i \sum_j \left( \text{Custo} HB_{jt} \times HB_{jt} + \text{Custo} FB_{jt} \times FB_{jt} \right) - s_1^+ = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Tabela 1. Resultado do plano de mistura para o cenário 1.

<b>Determinístico</b>										
<b>PA11 (de 11,00 à 11,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>Mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratío</b>	<b>% Precoce</b>
1	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
2	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
3	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
4	225	1173	-	102	-	-	-	5,505	11,99	15
5	225	1132	143	-	-	-	-	5,504	11,99	15
6	225	1173	-	102	-	-	-	5,505	11,99	15
7	225	1193	-	-	82	-	-	5,504	11,99	15
8	225	1205	-	-	-	70	-	5,504	11,99	15
9	225	1213	-	-	-	-	62	5,504	11,99	15
10	225	1213	-	-	-	-	62	5,504	11,99	15
11	225	1213	-	-	-	-	62	5,504	11,99	15
12	225	1213	-	-	-	-	62	5,504	11,99	15
<b>PA13 (de 13,00 à 13,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>Mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratío</b>	<b>% Precoce</b>
1	225	633	-	642	-	-	-	5,077	13,00	15
2	225	633	-	642	-	-	-	5,077	13,00	15
3	225	633	-	642	-	-	-	5,077	13,00	15
4	225	179	-	1096	-	-	-	4,718	13,99	15
5	225	-	1275	-	-	-	-	4,863	13,57	15
6	225	179	-	1096	-	-	-	4,718	13,99	15
7	225	396	-	-	879	-	-	4,717	13,99	15
8	225	527	-	-	-	748	-	4,718	13,99	15
9	225	614	-	-	-	-	661	4,718	13,99	15
10	225	614	-	-	-	-	661	4,718	13,99	15
11	225	614	-	-	-	-	661	4,718	13,99	15
12	225	614	-	-	-	-	661	4,718	13,99	15
<b>PA14 (de 14,00 à 14,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>Mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratío</b>	<b>% Precoce</b>
1	1125	873	-	5502	-	-	-	4,714	14,00	15
2	1125	873	-	5502	-	-	-	4,714	14,00	15
3	1125	873	-	5502	-	-	-	4,714	14,00	15
4	1125	-	-	6375	-	-	-	4,576	14,42	15
5	1125	-	4610	-	1795	-	-	4,712	14,01	14,9
6	1125	-	-	5937	-	438	-	4,544	14,53	15
7	1125	387	-	-	5988	-	-	4,403	14,99	15
8	1125	1276	-	-	-	5099	-	4,403	14,99	15
9	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
10	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
11	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
12	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
<b>PA15 (de 15,00 à 15,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>Mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratío</b>	<b>% Precoce</b>
1	675	-	-	1126	2699	-	-	4,400	15,00	15
2	675	-	-	1126	2699	-	-	4,400	15,00	15
3	675	-	-	1126	2699	-	-	4,400	15,00	15
4	-	-	-	2175	2325	-	-	4,400	15,00	0
5	675	-	524	-	3301	-	-	4,400	15,00	15
6	675	-	-	167	-	3658	-	4,128	15,99	15
7	675	-	-	-	3825	-	-	4,326	15,25	15
8	675	53	-	-	-	3772	-	4,128	15,99	15
9	675	491	-	-	-	-	3334	4,128	15,99	15
10	675	282	-	-	-	1796	1747	4,127	15,99	15
11	675	491	-	-	-	-	3334	4,128	15,99	15
12	675	53	-	-	-	3772	-	4,128	15,99	15

**Tabela 2.** Variáveis de desvio.

Notação	Descrição
$S_1^+$	Variável de desvio indicando o quanto a somatória dos custos da laranja, da armazenagem de produtos e falta de produtos está acima da meta 1: “custo zero”.
$S_{2it}^+$	Variável de desvio indicando o quanto o produto $i$ no período $t$ , está acima da especificação de <i>ratio</i> intermediária desejada pela meta 2 (em quantidade $\times$ <i>ratio</i> ).
$S_{2it}^-$	Variável de desvio indicando o quanto o produto $i$ no período $t$ , está abaixo da especificação de <i>ratio</i> intermediária desejada pela meta 2 (em quantidade $\times$ <i>ratio</i> ).

Restrições da meta 2, obtidas a partir das expressões de mistura (8) e (9) apresentadas na seção 3.1 (Expressão 21):

$$\left[ \sum_j \left( \begin{array}{l} QB_{jti} \times AB_j + \\ +QH_{jti} \times AH \end{array} \right) \right] - s_{2it}^+ + s_{2it}^- = ASM_i \times \sum_j (QB_{jti} + QH_{jti}) \quad \forall i, t \quad (21)$$

A restrição (20), juntamente com a nova função objetivo (19), estabelecem que o custo total da laranja, armazenagem de produtos e falta de produtos, deve ser o mais próximo possível de zero. Similarmente, as restrições (21) estabelecem que o *ratio* médio do produto  $i$ , obtido a partir das misturas das várias bases  $j$  em cada período  $t$ , deve ser o mais próximo possível do valor médio da faixa de *ratio* permitida para este produto.

Este modelo de programação por metas, junto com as restrições de não negatividade das variáveis, também foi codificado e resolvido pelo GAMS/CPLEX. Inicialmente resolveu-se o problema apresentado nessa seção minimizando o desvio da meta 1 (custo zero), ou seja, ignorou-se a meta 2 da função objetivo (19), para obter-se o custo mínimo  $F^*$ . Em seguida, resolveu-se o problema novamente minimizando o desvio da meta 2 (*ratio* médio) sob a meta 1, ou seja, ignorou-se a meta 1 da função objetivo (19) e adicionou-se no modelo a restrição de custo mínimo:  $S_1^+ = F^*$ . Em outras palavras, ao admitir-se que  $P_1 \gg P_2$ , procurou-se pela solução de mínimo desvio da meta de *ratio* médio, dentre todas as soluções alternativas de custo mínimo.

## 4.2 Análise da solução de programação por metas

O modelo de programação por metas discutido na seção 4.1 foi aplicado para resolver o cenário 1 da seção 3.2. Conforme mencionado, primeiro resolveu-se o modelo minimizando o desvio da meta 1 (custo zero) e, em seguida, resolveu-se o modelo minimizando o desvio da meta 2 (*ratio* médio) sob a meta 1. Como

estes dois modelos são de otimização linear, os tempos computacionais para resolvê-los pelo GAMS/CPLEX foram bem aceitáveis, da ordem de poucos segundos no microcomputador utilizado. O modelo contém 2.282 variáveis e 1.936 restrições.

O plano de mistura ótimo obtido considerando-se os objetivos 1 e 2, sendo que o objetivo 1 tem prioridade sobre o objetivo 2, é resumidamente apresentado na Tabela 3. Comparam-se os planos de mistura quando o objetivo é apenas minimizar o custo total (meta 1), apresentado na Tabela 1 da seção 3.2, e quando se tem também o objetivo de minimizar o desvio da especificação *ratio* dos produtos acabados de seu valor médio (meta 2), apresentado na Tabela 4. Similarmente à Tabela 1, esta tabela é composta por quadros, representando cada produto final; linhas, representando os diferentes períodos do horizonte de planejamento; e colunas indicando quanto de cada componente deve ser consumido em cada período de planejamento. As últimas colunas de cada quadro indicam a acidez, o *ratio* e a porcentagem de precece adicionada para o produto acabado resultante em cada período.

A abordagem traz resultados positivos, uma vez que parte do produto acabado gerado a partir desse plano de mistura apresenta especificação de *ratio* em torno do valor médio do intervalo. Isso pode ser visualizado na Tabela 3, na qual o *ratio* dos produtos “PA13” no mês 4, “PA14” nos meses 5 e 6 e “PA15” nos meses 5, 6 e 7, se alteraram na direção desejada. Por exemplo, 7.500 ton do produto acabado “PA14” gerado pelo plano de mistura no período 5, considerando-se apenas a meta 1, apresenta *ratio* igual a 14,01 (Tabela 1 da seção 3.2), enquanto esse mesmo produto nesse mesmo período resulta em *ratio* igual a 14,50, quando se consideram as metas 1 e 2 (vide a Tabela 3). Nota-se que a especificação de *ratio* para o produto acabado “PA14” varia de um valor mínimo de 14,00 a um valor máximo de 14,99, o que significa que o modelo fornece resultados melhores do ponto de vista da meta 2.

A análise dos resultados do modelo em questão evidencia que a abordagem de programação por metas utilizada é consistente, e oferece elementos importantes para dar apoio ao processo de tomada de decisão no planejamento da produção de suco concentrado

**Tabela 3.** Resultados do plano de mistura para o modelo de programação por metas com os objetivos 1 e 2.

<b>Meta 1 (mínimo custo) e Meta 2 mínimo desvio da especificação de ratio médio</b>										
<b>PA11 (de 11,00 à 11,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratio</b>	<b>% Precoce</b>
1	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
2	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
3	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
4	225	1275	-	-	-	-	-	5,585	11,82	15
5	225	1132	143	-	-	-	-	5,504	11,99	15
6	225	1173	-	102	-	-	-	5,505	11,99	15
7	225	1193	-	-	82	-	-	5,504	11,99	15
8	225	1205	-	-	-	70	-	5,504	11,99	15
9	225	1205	-	-	-	70	-	5,504	11,99	15
10	225	1205	-	-	-	70	-	5,504	11,99	15
11	225	1213	-	-	-	-	62	5,504	11,99	15
12	225	1213	-	-	-	-	62	5,504	11,99	15
<b>PA13 (de 13,00 à 13,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratio</b>	<b>% Precoce</b>
1	225	633	-	642	-	-	-	5,077	13,00	15
2	225	633	-	642	-	-	-	5,077	13,00	15
3	225	633	-	642	-	-	-	5,077	13,00	15
4	225	395	-	880	-	-	-	4,889	13,50	15
5	225	-	1275	-	-	-	-	4,863	13,57	15
6	225	179	-	1096	-	-	-	4,718	13,99	15
7	225	396	-	-	879	-	-	4,717	13,99	15
8	225	527	-	-	-	748	-	4,718	13,99	15
9	225	614	-	-	-	-	662	4,718	13,99	15
10	225	614	-	-	-	-	662	4,718	13,99	15
11	225	575	-	-	-	329	371	4,717	13,99	15
12	225	614	-	-	-	-	662	4,718	13,99	15
<b>PA14 (de 14,00 à 14,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratio</b>	<b>% Precoce</b>
1	1125	873	-	5502	-	-	-	4,714	14,00	15
2	1125	873	-	5502	-	-	-	4,714	14,00	15
3	1125	873	-	5502	-	-	-	4,714	14,00	15
4	1125	-	-	6375	-	-	-	4,576	14,42	15
5	1125	-	2678	-	3697	-	-	4,552	14,50	15
6	1125	-	-	6044	-	332	-	4,552	14,50	15
7	1125	387	-	-	5987	-	-	4,403	14,99	15
8	1125	1276	-	-	-	5099	-	4,403	14,99	15
9	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
10	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
11	1125	1868	-	-	-	-	4507	4,403	14,99	15
12	1125	1276	-	-	-	5099	-	4,403	14,99	15
<b>PA15 (de 15,00 à 15,99)</b>		<b>(consumo esperado de precoce: máximo de 15%)</b>								
	<b>Precoce</b>	<b>BA11</b>	<b>BA13</b>	<b>BA14</b>	<b>BA15</b>	<b>BA16</b>	<b>BA17</b>			
ratio	14,0	11,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5			
acidez	4,714	5,739	4,889	4,552	4,258	4,000	3,771			
<b>mês</b>	<b>Quantidade em toneladas</b>							<b>Acidez</b>	<b>Ratio</b>	<b>% Precoce</b>
1	675	-	-	1126	2699	-	-	4,400	15,00	15
2	675	-	-	1126	2699	-	-	4,400	15,00	15
3	675	-	-	1126	2699	-	-	4,400	15,00	15
4	675	-	-	2175	2325	-	-	4,400	15,00	0
5	675	-	-	-	3825	-	-	4,326	15,25	15
6	675	-	-	1231	-	2594	-	4,258	15,50	15
7	675	-	-	-	3192	-	633	4,258	15,50	15
8	675	53	-	-	-	3772	-	4,128	15,99	15
9	675	491	-	-	-	-	3334	4,128	15,99	15
10	675	491	-	-	-	-	3334	4,128	15,99	15
11	675	491	-	-	-	-	3334	4,128	15,99	15
12	675	491	-	-	-	-	3334	4,128	15,99	15

congelado de laranja. Isso ocorre principalmente no que tange à elaboração do plano de mistura, que evidencia o quanto é viável que os produtos fiquem o mais próximo possível da média de suas especificações mínimas e máximas de *ratio*, sem afetar a meta principal de minimização de custos.

## 5 Considerações finais

### 5.1 Conclusões

Como apresentado na seção 1, o objetivo deste trabalho foi modelar o planejamento agregado da produção de suco concentrado congelado de laranja e, desta forma, que a modelagem se torne uma ferramenta efetiva de apoio e análise à tomada de decisão. Para isso, representaram-se as principais decisões envolvidas no planejamento por modelos de programação linear (seção 3) e programação por metas (seção 4). Inicialmente apresentou-se uma abordagem para o problema que permite um planejamento mais integrado da cadeia de suprimentos de suco de laranja. Esse modelo pode ser uma ferramenta importante para apoiar a decisão neste sistema. Isto foi realizado por meio de uma extensão do modelo proposto em Munhoz e Morabito (2001a, b), ao qual se incorpora o planejamento de colheita ao planejamento de produção, e também os cálculos de *ratios* a partir da consideração de acidez das bases de suco.

Em seguida, apresentou-se uma abordagem de programação por metas, a qual apresenta resultados promissores, uma vez que oferece a possibilidade de gerar planos de produção objetivando atingir a especificação média para o parâmetro *ratio* do produto acabado (vide seção 4.2), sem prejudicar o objetivo de maior importância, que, no problema em questão, é minimizar custos de matéria-prima e armazenagem/falta de produtos. Nota-se que a vantagem deste modelo de programação por metas em relação ao modelo apresentado na seção 3 é que, neste último, uma vez atingido o valor ótimo da função objetivo (minimizar custos), a especificação de *ratio* do produto acabado em geral fica no limite inferior ou no limite superior da faixa de *ratio* definida para o produto acabado (vide Tabelas 2 da seção 3.2). Desta forma, pequenos desvios na execução do plano de produção podem levar a produtos fora de especificação. Por outro lado, no modelo de programação por metas, o plano de produção gerado está mais bem protegido contra tais desvios (vide Tabela 3 da seção 4.2). Todos os modelos lineares aqui apresentados são resolvidos pelo *software* GAMS/CPLEX e os tempos de processamento são da ordem de poucos segundos, não sendo, portanto, um limitante para a aplicação destas abordagens na prática.

Cabe destacar que as principais contribuições deste estudo estão no desenvolvimento de modelos

de programação linear e programação por metas para apoiar o processo de tomada de decisão no planejamento agregado de produção e colheita. Sendo que, a consideração das curvas de maturação das laranjas no planejamento de colheita e a consideração dos processos de mistura de diferentes tipos de sucos para obtenção da especificação de *ratio* do produto acabado no planejamento da produção conduzem a modelos que incorporam grande parte das decisões envolvidas na cadeia de suprimentos deste setor. Desta forma, os modelos apoiam o tomador de decisão na busca à excelência na gestão da cadeia de suprimentos.

### 5.2 Perspectivas para pesquisa futura

O presente trabalho oferece várias oportunidades para pesquisa futura. Algumas delas são destacadas a seguir. Conforme mencionado anteriormente, uma perspectiva interessante para investigação futura seria incorporar nos modelos outras características que interferem na determinação da especificação do *ratio* da fruta, tais como a região produtora e a florada. Outra perspectiva interessante seria incluir nos modelos o planejamento de distribuição do produto acabado, pois neste setor crítico os sistemas de distribuição de produtos em geral são em nível internacional, com armazéns de distribuições em diferentes geografias, tais como: EUA, Europa e Ásia. Em Munhoz (2000) e Munhoz e Morabito (2001a, b), pode ser encontrada uma descrição de um sistema de distribuição de suco de laranja concentrado de laranja.

Seria também interessante incorporar na abordagem de programação por metas uma análise de compensação (*trade-off*) entre soluções subótimas e *ratio* do produto acabado resultante do plano de produção. Eventualmente uma pequena variação do objetivo primário (custo mínimo) pode resultar em planos de produção que gerem especificações de *ratio* dos produtos acabados bem mais próximas do valor médio da faixa permitida. Isto significa maior proteção contra possíveis desvios, minimizando assim a ocorrência de produtos fora de especificação, apesar de implicar em (pequenos) aumentos no custo mínimo do plano. Outros resultados também poderiam ter sido analisados neste trabalho, estimando-se as penalizações  $P_1$  e  $P_2$  para os objetivos de custo mínimo e *ratio* médio, respectivamente (ao invés de se considerar  $P_1 \gg P_2$ ), e resolvendo-se o modelo de programação por metas com a função biobjetivo escalonada desta maneira.

Outra pesquisa promissora é desenvolver modelos de otimização robusta (BERTSIMAS; SIM, 2003, 2004; BERTSIMAS; THIELE, 2006) a partir destes modelos determinísticos, incorporando as incertezas inerentes a determinados parâmetros do modelo (MUNHOZ, 2009). Pretende-se reportar os resultados desta pesquisa em um futuro próximo.

Finalmente, uma investigação futura importante baseada nas abordagens apresentadas neste trabalho seria desenvolver procedimentos para desagregação dos planos agregados gerados por estas abordagens. Desta forma, seria possível mostrar como estes modelos táticos de planejamento agregado poderiam ser desdobrados em planos operacionais, que, por sua vez, teriam os seus resultados controlados e também poderiam retroalimentar os planos táticos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores anônimos pelos úteis comentários e sugestões. Esta pesquisa contou com apoio do CNPq e FAPESP

## Referências

- ACKOFF, R. L. **Scientific method**: optimizing applied research decisions. John Wiley & Sons, 1962.
- AL-SHAMMARI, M.; DAWOOD, I. Linear programming applied to a production blending problem: a spreadsheet modeling approach. **Production and Inventory Management Journal**, v. 38, n. 1, p. 1-7, 1997.
- ARENALES, M. N.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H.: **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Campus; Elsevier, 2007.
- AXSATER, S.; JONSSON, H. Aggregation and disaggregation in hierarchical production. **European Journal of Operational Research**, n. 17, p. 338-350, 1984.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows**. John Wiley & Sons, 1990.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. Robust discrete optimization and network flows. **Mathematical Programming Series B**, v. 98, n. 1-3, p. 49-71, 2003.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. **Operations research**, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004.
- BERTSIMAS, D.; THIELE, A. A robust optimization approach to inventory theory. **Operations Research**, v. 54, n. 1, p. 150-168, 2006.
- BROOKE, A., KENDRICK, D., MEERAUS, A. **Release 2.25 GAMS - A User's Guide**. San Francisco: The Scientific Press, 1992.
- CAIXETA FILHO, J. V. **Estrutura de modelagem para programação de colheita de laranja**. 1993. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 1993.
- CAIXETA FILHO, J. V. Orange harvesting scheduling management: a case study. **Journal of the Operational Research Society**, v. 57, p. 637-642, 2006.
- GEOFFRION, A. M. A priori error bounds for procurement commodity aggregation in logistics planning models. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 24, n. 2, p. 201-212, 1977.
- HAX, A. C.; MEAL, H. C. Hierarchical integration of production planning and scheduling. In: GEISLER, M. A. (Ed.). **Studies in Management Sciences**, logistics. v. 1. New York: North Holland-American Elsevier, 1975.
- HAX, A.C.; CANDEA, D. **Production and inventory management**. Prentice-Hall, 1984.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, J. G. **Introduction to operations research**. 6<sup>th</sup> ed. New York: McGraw-Hill International Editions, 1995.
- JOHNSON, L. A.; MONTGOMERY, D. C. **operations research in production planning, scheduling, and inventory control**. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- JUNQUEIRA, R. A. R.; MORABITO, R. Planejamento otimizado da produção e logística de empresas produtoras de sementes de milho: um estudo de caso. **Gestão & Produção**, v. 15, p. 367-380, 2008.
- JUNQUEIRA, R. A. R.; MORABITO, R. Um modelo de otimização linear para o planejamento agregado da produção e logística de sementes de milho. **Produção**, v. 16, n. 3, p. 510-525, 2006.
- KESTERSON, J. W.; BRADDOCK, R. J. **By-products and specialty products of Florida citrus**. Gainesville: Institute of Food and Agricultural Sciences, University of Florida, 1976. Bulletin 784.
- MUNHOZ, J. R. **Otimização no planejamento agregado de produção em indústrias de processamento de suco concentrado congelado de laranja**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.
- MUNHOZ, J. R. **Um modelo baseado em programação linear e programação de metas para análise de um sistema de produção e distribuição de suco concentrado congelado de laranja**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2000.
- MUNHOZ, J. R.; MORABITO, R. A goal programming model for frozen concentrated orange juice production and distribution system. **Opsearch**, v. 38, n. 6, p. 630-646, 2001b.
- MUNHOZ, J. R.; MORABITO, R. Um modelo baseado em programação linear e programação de metas para análise de um sistema de produção e distribuição de suco concentrado congelado de laranja. **Gestão & Produção**, v. 8, n. 2, p. 139-159, 2001a.
- NAHMIAS, S. **Production and operations analysis**. Richard D. Irwin, 1993.
- OZAN, T. M. **Applied Mathematical Programming for Engineering and Production Management**. Prentice-Hall, 1986.
- PAIVA, R. P. O. **Modelagem do planejamento agregado da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético utilizando programação matemática e otimização robusta**. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.
- PAIVA, R. P. O.; MORABITO, R. An optimization model for the aggregate production planning of a Brazilian sugar and ethanol milling company. **Annals of Operations Research**, v. 169, p. 117-130, 2009.

- PAIVA, R. P. O.; MORABITO, R. Um modelo de otimização para o planejamento agregado da produção em usinas de açúcar e álcool. **Gestão & Produção**, v. 14, n. 1, p. 25-41, 2007.
- PINTO, K. C. R. **Contribuição à análise de decisão sobre os sistemas de distribuição física de suco de laranja brasileiro de exportação**. Tese (Doutorado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.
- SCHRAGE, L. **Linear, integer and quadratic programming with LINDO**. The Scientific Press, 1986.
- SCHRAGE, L. **Optimization Modeling with Lingo**. Lindo Systems, 2001.
- SHAPIRO, J. F. Mathematical programming models and methods for production planning and scheduling. In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, P. H. (Eds.). **Logistic of Production and Inventory**. Elsevier Science Publishers, 1993. p. 371-439. (Handbooks in Operations Research and Management Science, v. 4).
- SHAPIRO, J. F. **Modeling the supply chain**. Califórnia: Pacific Grove, 2001.
- WILLIAMS, H. P. **Model building in mathematical programming**. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- WINSTON, W. L. **Operations research: applications and algorithms**. Boston: Wadsworth, 1991.
- ZIPKIN, P. Exact and approximate cost function for product aggregates. **Management Science**, n. 28, p. 1002-1012, 1982.